Örnek: Elektronik cihaz üreten bir fabrikada üretilen, cep telefonlarının ömrü yıl olarak aşağıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}\cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot x}, & x>0, \\ 0, & d.h. \end{cases}$$

Rastgele seçilen bir cep telefon~~unun~~ ömrünün,

a.) En çok 4 yıl olma olasılığı?

b.) En az 3 " " "

c.) Beklenen ömrü?

d.) ~~Bekl~~ ömrünün standart sapması?

Çözüm:

a.) X: Cihazın dayanma süresi (yıl)

$$P(X\leq 4)=\int_0^4 \frac{1}{3}\cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot x}dx=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{\frac{1}{3}}\cdot e^{-\frac{1}{3}x}\right)\Big|_0^4$$

$$F(4)=-e^{-\frac{4}{3}}+e^{0}=1-e^{-\frac{4}{3}}=0,7364$$

b.) $$P(X\geq 3)=\int_3^{\infty}\frac{1}{3}\cdot e^{-\frac{1}{3}x}dx=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{-\frac{1}{3}}\cdot e^{-\frac{1}{3}x}\right)\Big|_3^{\infty}$$

$$=+e^{-\frac{1}{3}x}\Big|_3^{\infty}=e^{-1}=0,3678$$

c.) $E(X)=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$ yıl.

d.) $V(X)=\frac{1}{\alpha^2}=\frac{1}{(\frac{1}{3})^2}=9$ yıl.

$\sigma_x=\sqrt{9}=3$ olarak elde edilir.

Örnek: Bir otomobil ortalama her 8 ayda bir arıza yapmaktadır.

a.) Son arızadan 10 ay sonra ilk kez arızayla karşılaşma olasılığı nedir?

b.) Otomobil son arızadan sonra 6 ay arıza yapmadığına göre, ilave 4 ay daha arızasız geçme olasılığı nedir?

Çözüm: Ardışık iki arıza arasında geçen zaman X t.d. olsun. Birim zamandaki olay sayısı,

$$\alpha = \frac{1}{8} \text{ (Arıza/ay)}$$

olan üstel dağılım gösterir. Böylece olasılık fonksiyonu;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} \cdot e^{-\frac{1}{8}x}, & x > 0 \\ 0, & d.h. \end{cases}$$

a.) Son arızadan 10 ay sonra ilk kez arızalanması, 10 ay arızasız çalışması ile aynıdır;

$$p(x < 10) = \int_0^{10} \frac{1}{8} \cdot e^{-\frac{1}{8}x} dx$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left(- \frac{e^{-\frac{1}{8}x}}{1/8} \right) \Bigg|_0^{10} = 1 - e^{-\frac{5}{4}}$$

$$= 0{,}713$$

b.) 6 ayın arızasız geçmesi, sonraki 4 aylık süreyi etkilemez. Bu durum "belleksiz olma" özelliği üstel dağılımın ile ilgilidir. Yani;

$$p(X > 6 + 4 \mid x > 6) = p(x > 6) \cdot p(X > 4)$$

bağımsızlıktan dolayı yazılabilir.

Bellekesizlik özelliği;

$p(X > s+t) = p(X > s) \cdot p(X > t)$ dir.

Üstel dağılım için;

$p(X > s+t) = e^{-\alpha.(s+t)} = e^{-\alpha.s - \alpha.t}$

$= e^{-\alpha.s} \cdot e^{-\alpha.t}$

$= p(X > s) \cdot p(X > t)$ elde edilir.

$p(X > s+t \mid X > s) = \dfrac{p(X > s+t,\ X > s)}{p(X > s)}$ şartlı olasılık.

$= p(X > s+t) = p(X > s) \cdot p(X > t)$

Böylece, $p(X > 6) = \int_{6}^{\infty} \frac{1}{8} \cdot e^{-\frac{1}{8}x} dx$

$= -e^{-\frac{1}{8}x} \Big|_{6}^{\infty} = e^{-\frac{6}{8}} = 0,472$,,

$p(X > 4) = e^{-\frac{4}{8}} = 0,607$,,

$\Rightarrow p(X > 6+4 \mid X > 6) = p(X > 6) \cdot p(X > 4)$

$= (0,472) \cdot (0,607) = (0,286)$ bulunur.

Bu değer $p(X > 10) = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{8} \cdot e^{-\frac{1}{8}x} dx$

$= e^{-\frac{1}{8}x} \Big|_{10}^{\infty} = e^{-\frac{10}{8}} = 0,286$,,

ile aynıdır.